EXERCICE : Intégrale

On pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx$

1) Justifier l'existence de I_n et calculer I_0.
2) En utilisant une intégration par partie, écrire une relation entre I_n et I_{n-1}

SOLUTION

1) Justifions l'existence de I_n et calculons I_0.

- **Justifions l'existence de I_n**

La fonction $x \to x^n$ est continue sur [0 ; 1] car c'est une fonction monôme de degré n.

La $x \to \sqrt{1-x}$ est la composée de $x \to x-1$ et $x \to \sqrt{x}$ toutes continues sur [0, 1], alors $x \to x^n \sqrt{1-x}$ est continue sur [0, 1], comme produit de deux fonctions continues donc intégrable sur [0, 1].

On peut donc conclure que I_n existe.

- **Calculons I_0**

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ car $x^0 = 1$

Nous savons que si une fonction est de la forme $u'.\sqrt{u}$, alors sa primitive est de la forme $\frac{2}{3}.u.\sqrt{u}$.

$$I_0 = -\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$$

2) Détermination d'une relation entre I_n et I_{n-1}.

Posons : $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{array} \right.$

$$I_n = \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x)\sqrt{1-x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} n \int_0^1 (1-x) x^{n-1} \sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2}{3} n \int_0^1 (1-x) x^{n-1} \sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2}{3} n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x}dx - \frac{2}{3} n \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2}{3} nI_{n-1} - \frac{2}{3} nI_n$$

$$I_n \left(1 + \frac{2}{3} n \right) = \frac{2}{3} n.I_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow I_n \left(2n+3 \right) = 2n.I_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}.I_{n-1}$$